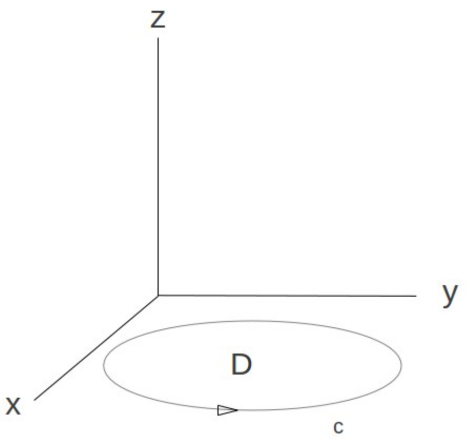
La belleza de la simplicidad

Si se tiene el teorema de Green

$$\oint_c P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D (\delta Q(x,y)/\delta x - \delta P(x,y)/\delta y)\,dx\,dy$$



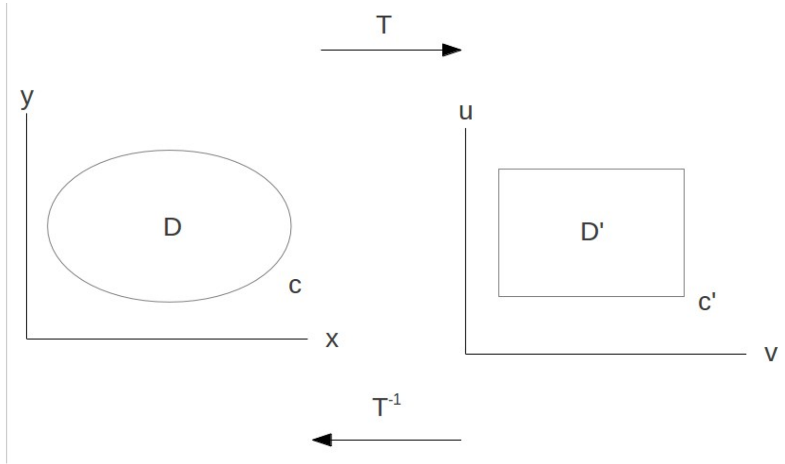
Apelando a una de las consecuencias del teorema de Green por medio de la cual se puede calcular el área de la superficie D a través de la integral de línea alrededor de c se tiene que si:

$$Q(x,y)=x\,,P(x,y)=0$$

entonces, según el teorema de Green:

$$\oint_c x\,dy = \iint_D dx\,dy$$

Ahora se realiza el siguiente cambio de variables:



$$x=f(u,v),\ y=g(u,v)$$

$$\oint_{c} x\,dy=\iint_{D} dx\,dy=\oint_{c'} f((\delta g/\delta u)\,du+(\delta g/\delta v)\,dv)$$

donde $(\delta g/\delta u)du+(\delta g/\delta v)dv$ es el diferencial total exacto de $g(u,v)$ y:

$$\oint_{c'} f((\delta g/\delta u)\,du+(\delta g/\delta v)\,dv)=\oint_{c'} (f\,\delta g/\delta u)\,du+(f\,\delta g/\delta v)\,dv$$

aplicando el teorema de Green con las nuevas variables:

$$\oint_{c'} (f\,\delta g/\delta u)\,du+(f\,\delta g/\delta v)\,dv=\iint_{D'} (\delta(f\,\delta g/\delta v)/\delta u-\delta(f\,\delta g/\delta u)/\delta v)\,du\,dv$$

distribuyendo los operadores derivativos:

$$\iint_{D'} ((\delta f/\delta u)(\delta g/\delta v)+f(\delta^2 g/\delta u\,\delta v)-(\delta f/\delta v)(\delta g/\delta u)-f(\delta^2 g/\delta v\,\delta u))\,du\,dv$$

como se puede apreciar, aplicando el teorema de Clairaut se cancelan las derivadas cruzadas y

$$\iint_{D'} ((\delta f/\delta u)(\delta g/\delta v)-(\delta f/\delta v)(\delta g/\delta u))\,du\,dv$$

esta última expresión nos habilita a escribir la siguiente igualdad:

$$\iint_{D} dx\,dy=\iint_{D'} ((\delta f/\delta u)(\delta g/\delta v)-(\delta f/\delta v)(\delta g/\delta u))\,du\,dv$$

con la cual se concluye la demostración del jacobiano como fórmula que constituye el factor de forma en todo cambio de variables dobles.